

Technischer Bericht Nr. 49

Lösungen der ionosphärischen Bilanzgleichung
im Falle einer Sonneneruption

Dr. H. VOLLAND

H49

1 9 6 1

Lösungen der ionosphärischen Bilanzgleichung im Falle einer Sonneneruption

Zusammenfassung

Für den Fall eines solaren Strahlungsbruches, der innerhalb der Ionosphäre die Ionenproduktion

$$q = q_0(1 + \delta_{\max} e^{-\gamma t}) \quad t \geq 0$$

erzeugt, wird die Bilanzgleichung für Elektronen

$$\frac{dN}{dt} = q(t) - \alpha N^2 - \beta N$$

mittels Analogrechner gelöst. Die Lösungen werden graphisch in Abhängigkeit von den Parametern αN_0 , $\delta_{\max}$, γ und $\frac{\alpha N_0}{\beta}$ dargestellt.

Heinrich-Hertz-Institut für Schwingungsforschung

Der Bearbeiter

gez. H. VOLLAND

(Dr. H. Volland)

Der Abteilungsleiter

gez. F.W. GUNDLACH

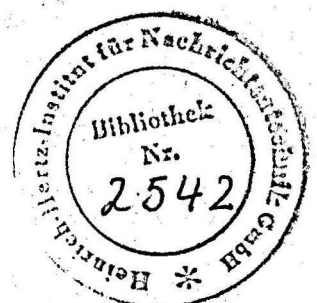
(Prof.Dr.-Ing.F.W.Gundlach)

Der Institutsdirektor

gez. L. CREMER

(Prof.Dr.-Ing.L. Cremer)

Berlin-Charlottenburg, den 23. März 1961



1. Einleitung

Sobald innerhalb eines gewissen Höhenbereiches an der Ionisation der Ionosphäre nur eine Luftkomponente maßgeblich beteiligt ist, lauten die Bilanzgleichungen (unter Vernachlässigung von vertikalem Ladungstransport und horizontalen Gradienten von N und N^-) [1]

$$\frac{dN}{dt} = q - \alpha_d N N^+ - n \beta_a N + \epsilon N^-$$

$$\frac{dN^-}{dt} = -\alpha_i N^- N^+ + n \beta_a N - \epsilon N^- \quad (1)$$

$$N^+ = N + N^- ,$$

mit

N = Elektronendichte

N^+ = Dichte der positiven Ionen

N^- = Dichte der negativen Ionen

q = Ionenproduktion pro Volumen

α_d = Koeffizient der dissoziativen Rekombination durch Stöße zwischen Elektronen und positiven Ionen

β_a = Koeffizient der Anlagerung von Elektronen an neutrale Partikel

n = neutrale Partikeldichte

ϵ = $\chi n + \rho S$

χ = Koeffizient der Stoßabspaltung der Elektronen von negativen Ionen

ρ = Koeffizient der Photoablösung der Elektronen von negativen Ionen

S = Intensität der Sonnenstrahlung

α_i = Koeffizient der Rekombination zwischen positiven und negativen Ionen

Die letzte der Gleichungen 1 gibt an, daß das Gas elektrophisch neutral ist.

Die Koeffizienten werden im allgemeinen Temperatur- und Druckabhängig sein, also mit der Höhe variieren. ϵ ist außerdem noch von der Strahlungsintensität abhängig.

Wenn negative Ionen nicht existieren, reduziert sich das Gleichungssystem 1 auf die "reine" Rekombinationsgleichung für Elektronen

$$\frac{dN}{dt} = q - \alpha_d N^2. \quad (2)$$

Eine "reine" Anlagerungsgleichung

$$\frac{dN}{dt} = q - n\beta_a N \quad (3)$$

herrscht vor, falls die Größen $\frac{\epsilon N^-}{N}$ und $\alpha_d N^+$ gegenüber $n\beta_a$ vernachlässigt werden können. In jedem anderen Falle muß das vollständige Gleichungssystem 1 behandelt werden, das infolge seiner vielen Parameter zu einer hoffnungslosen Mannigfaltigkeit von Lösungen führt, solange die Parameter selbst unbekannt sind. Die Verhältnisse werden noch komplizierter, wenn mehrere Luftkomponenten an der Ionisation beteiligt sind.

Da aber andererseits das Gl-System 1 die Basis für die experimentelle Ermittlung der Anlagerungs- und Rekombinationskoeffizienten darstellt, erscheint es zweckmäßig, die beiden "typischen" Gleichungen 2 und 3 als Ausgangspunkt einer ersten Diskussion zu benutzen. Die Struktur der ersten Gleichung 1 legt es nahe, diese beiden Gleichungen in einer heuristischen Form

$$\frac{dN}{dt} = q - \alpha N^2 - \beta N \quad (4)$$

mit konstanten Koeffizienten α und β zu kombinieren.

Eine Sonneneruption hat eine zusätzliche Ionisation im Gebiet unterhalb etwa 100 km Höhe zur Folge und erweist sich infolge ihrer kurzzeitigen Erscheinung und der dabei auftretenden großen zeitlichen Änderungen von N als brauchbares Mittel zur Entscheidung der Frage, ob Rekombination oder Anlagerung in diesen Höhen vorherrscht. Die parallel mit einer Sonneneruption auftretenden Ausbrüche solarer Radiostrahlung und H α -Eruptionen sowie die Sekundäreffekte innerhalb der tiefen Ionosphäre (Mögel-Dellinger-Effekte, Feldstärkeanoma-

lien im Lang- und Längstwellenbereich, erdmagnetische Sonneneruptionseffekte) lassen den Schluß zu, daß ein typischer Strahlungsausbruch den (idealisierten) zeitlichen Verlauf

$$\begin{aligned} S &= S_0 & \text{zur Zeit } t \leq 0 \\ S &= S_0 (1 + \delta_{\max} e^{-\gamma t}) & \text{zur Zeit } t \geq 0 \end{aligned} \quad (5)$$

besitzt [2]). Die Abklingzeit auf $1/e$ von $\delta_{\max}$ erfolgt normalerweise innerhalb von 10 bis 15 Minuten, und γ liegt etwa in den Grenzen

$$10^{-3} \text{ sec}^{-1} \leq \gamma \leq 10^{-2} \text{ sec}^{-1}$$

Die Gleichungen 2 und 4 sind Differential-Gleichungen vom RICCATI'schen Typ und entziehen sich einer elementaren Quadratur. Da für eine erfolgreiche quantitative Bestimmung von α oder β ein möglichst umfangreiches Lösungssystem der Gleichungen 2,3 und 4 erwünscht ist, wurde die "reine" Rekombinationsgleichung 2 mit Hilfe des Telefunkens Analogrechners des Heinrich-Hertz-Institutes gelöst und die Ergebnisse graphisch in Abhängigkeit von den Parametern $\delta_{\max}$, γ und αN_0 dargestellt. Das Gleiche erfolgte mit der Gleichung 4 für den Spezialfall $\alpha N_0 = \beta$. Die "reine" Anlagerungsgleichung 3 gestattet eine vollständige Quadratur. Auch sie ist diskutiert und ihre Lösungen graphisch gegeben.

2. Umformung der Bilanzgleichung 4

Es wird vorausgesetzt, daß die Ionenproduktion proportional der ionisierenden Strahlung ist:

$$q \sim S \quad (6)$$

Die langsame tageszeitliche Änderung der ungestörten Ionenproduktion q_0 wird vernachlässigt:

$$q_0 = \alpha N_0^2 + \beta N_0 \quad (7)$$

(N_0 ist die ungestörte Elektronendichte)

und α bzw. β ändere sich nicht im Verlaufe des Strahlungsausbruches.

Mit dem Ansatz

$$\begin{aligned} N &= N_0(1 + \Delta) \\ q &= q_0(1 + \delta) \\ \delta &= \delta_{\max} e^{-\gamma t} \\ T &= (\beta + \alpha N_0)t \\ \lambda &= \frac{\alpha N_0}{\beta} \end{aligned} \quad (8)$$

wird aus Gleichung 4

$$\frac{d\Delta}{dT} = \delta_{\max} e^{-\frac{\gamma T}{\beta(1+\lambda)}} - \frac{(1+2\lambda)}{(1+\lambda)} \Delta - \frac{\lambda}{(1+\lambda)} \Delta^2. \quad (9)$$

Mit $\lambda = 0$ wird daraus die "reine" Anlagerungsgleichung

$$\frac{d\Delta}{dT} = \delta_{\max} e^{-\frac{\gamma T}{\beta}} - \Delta. \quad (10)$$

$\lambda = \infty$ führt zur "reinen" Rekombinationsgleichung

$$\frac{d\Delta}{dT} = \delta_{\max} e^{-\frac{\gamma T}{\alpha N_0}} - \frac{3}{2}\Delta - \frac{1}{2}\Delta^2, \quad (11)$$

und $\lambda = 1$ ergibt eine Bilanzgleichung, in der Anlagerung und Rekombination gleich wirksam sind:

$$\frac{d\Delta}{dT} = \delta_{\max} e^{-\frac{\gamma T}{2\beta}} - \frac{3}{2}\Delta - \frac{1}{2}\Delta^2. \quad (12)$$

3. Lösung der "reinen" Anlagerungsgleichung

Die Gleichung 10 läßt sich sofort integrieren, und man erhält als Lösung

$$\frac{\Delta}{\delta_{\max}} \equiv \frac{1}{1 - \frac{\gamma}{\beta}} e^{-\beta t} \left(e^{\beta t(1 - \frac{\gamma}{\beta})} - 1 \right). \quad (13)$$

Das Maximum von Δ ist zur Zeit

$$Bt_{\max} = \frac{1}{\frac{\gamma}{\beta} - 1} \ln \frac{\gamma}{\beta} \quad (14)$$

und hat den Wert

$$\frac{\Delta_{\max}}{\delta_{\max}} = \frac{\beta}{\gamma} e^{-Bt_{\max}} \quad (15)$$

Für den Fall $\gamma = \beta$ entartet die Lösung Gl. 13 zu

$$\frac{\Delta}{\delta_{\max}} = Bt e^{-Bt} \quad (16)$$

und hat ihr Maximum zur Zeit

$$Bt_{\max} = 1 \quad (17)$$

Ersichtlich wird der Abklingvorgang von Δ in Gl. 13 durch das Abklingen der Ionenproduktion δ erzwungen, falls $\beta \gg \gamma$ ist. Nur für den Fall, daß $\beta \approx \gamma$ ist, erfolgt das Abklingen frei. Aus diesem Grunde ist bei der gelegentlich benutzten Methode, β und auch α aus dem Abklingvorgang allein zu bestimmen, indem die Annahme $\delta = 0$ für $t > t_{\max}$ gemacht wird, Vorsicht am Platze.

4. Vorbereitung der Bilanzgleichung 9 für den Analogrechner

Durch Transformation auf die Maschinenwerte des Analogrechners

$$\begin{aligned} \frac{\Delta}{\delta_{\max}} &= A x \\ T &= B \tau \end{aligned} \quad (18)$$

erhält man aus Gl. 9

$$\frac{dx}{d\tau} = \frac{B}{A} e^{-\frac{\gamma B \tau}{\beta(1+\lambda)}} - \frac{1+2\lambda}{1+\lambda} B x - \frac{\lambda}{1+\lambda} \delta_{\max} A B x^2 \quad (19)$$

Die Analogrechner-Schaltung der Abb. 1 ist die Analogie zur Differential-Gleichung

$$\frac{dx}{d\tau} = y_0 e^{-a_1 T_1 \tau} - a_2 T_2 x - a_3 T_2^2 x^2 \quad (20)$$

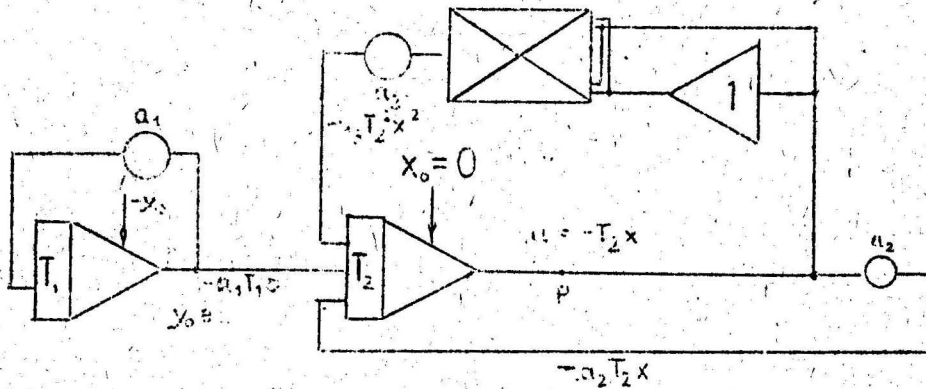


Abb. 1

Ein Vergleich der Koeffizienten der Gleichungen 19 und 20 ergibt

$$\begin{aligned} \frac{B}{A} &= y_0 & \frac{1+2\lambda}{1+\lambda} B &= a_2 T_2 \\ \frac{B\gamma}{B(1+\lambda)} &= a_1 T_1 & \frac{\lambda}{1+\lambda} \delta_{\max} AB &= a_3 T_2^2. \end{aligned} \quad (21)$$

Die im Punkte P (Abb.1) abgegriffene Spannung ist

$$u = -T_2 x = -\frac{T_2 \Delta}{A \delta_{\max}},$$

also:

$$\frac{\Delta}{\delta_{\max}} = -\frac{A}{T_2} u. \quad (22)$$

5. Darstellung der Ergebnisse

In der Abb.2 sind die Lösungswerte $\frac{\Delta}{\delta_{\max}}$ der Anlagerungsgleichung 10 in Abhängigkeit von der Zeit $T = \beta t$ und mit $\frac{\gamma}{B}$ als Parameter aufgetragen.

Die Abb.3 bis 11 geben die Lösungen der Rekombinationsgleichung 11. Hier ist $\frac{\Delta}{\delta_{\max}}$ in Abhängigkeit von $\alpha N_0 t$ mit $\frac{\gamma}{\alpha N_0}$ als Parameter gezeichnet. Die verschiedenen Abbildungen gelten für die verschiedenen Werte $\delta_{\max} = 1, 5, 10, 50, 100, 500, 1000, 5000$ u. 10.000. Die gestrichelten Linien verbinden die Orte der Maxima von Δ .

In den Abb.12 bis 14 sind die Lösungskurven $\frac{\Delta}{\delta_{\max}}$ der Gl.12 ($\lambda = 1$) in Abhängigkeit von $T = 2 \beta t$ und mit $\frac{\gamma}{2B}$ als Parameter dargestellt. Die Abbildungen gelten für die Werte $\delta_{\max} = 1, 10$ und 100.

Die Abb. 15 und 16 geben die Maximalzeiten $\alpha N_0 t_{\max}$ und die Maximalamplituden $\frac{\Delta_{\max}}{\delta_{\max}}$ der Rekombinationsgleichung 11 in Abhängigkeit von $\frac{\gamma}{\alpha N_0}$ und mit $\delta_{\max}$ als Parameter.

In den Abb. 17 und 18 sind die Maximalzeiten $(1+\lambda) t_{\max}$ und die Maximalamplituden $\frac{\Delta_{\max}}{\delta_{\max}}$ der Anlagerungsgleichung 10 ($\lambda=0$) sowie der Bilanzgleichung 12 ($\lambda=1$) in Abhängigkeit von $\frac{\gamma}{B(1+\lambda)}$ und mit $\delta_{\max}$ als Parameter eingezeichnet. Zum Vergleich sind noch einmal (gestrichelt) die entsprechenden Werte der Rekombinationsgleichung 11 ($\lambda=\infty$) eingetragen.

6. L i t e r a t u r

- 1 MITRA, S.K. "The upper atmosphere" p. 312
Calcutta 1952
- 2 HACHENBERG, O. "Vergleich zwischen 3,2 cm Radiostrahlung der Sonne und ionosphärischer Dämpfung im D-Gebiet während einer Sonneneruption"
VOLLAND, H.,
Zeitschrift f. Astrophys. 47 (1959),
69-80

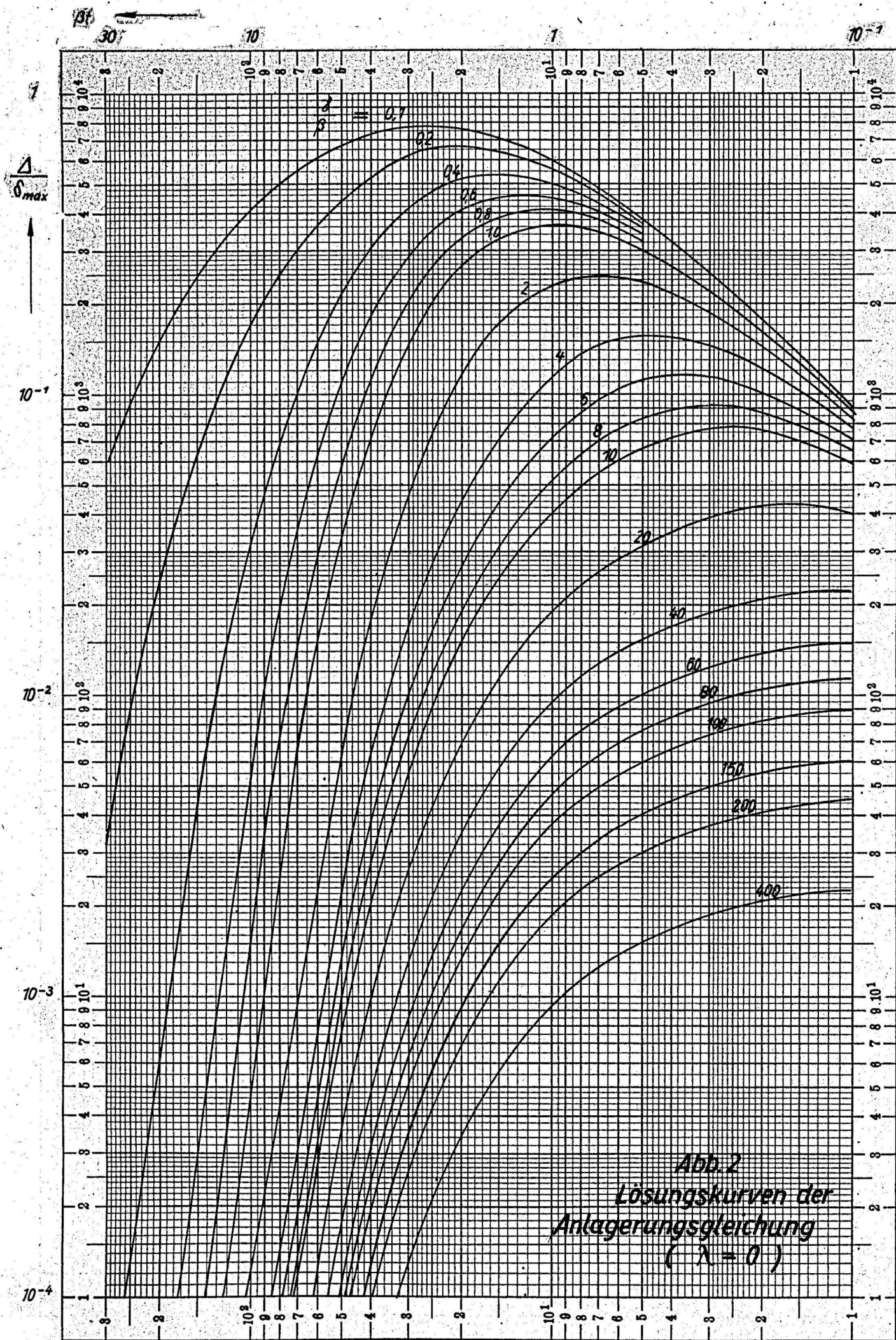


Abb. 2
Lösungskurven der
Anlagerungsgleichung
($\lambda = 0$)

